Développement : Suites de Polygones

RM

2022-2023

Références

1. Oral à l'agreg de math

Enoncé :

Soit P un polygone du plan complexe dont les sommets sont $\{z_1, ..., z_n\}$. On définit alors par récurrence une suite de polygones $(P_k)_{k\geq 0}$, avec $P_0 = P$, et où les sommets de P_{k+1} sont les milieux des arêtes de P_k.
Alors la suite (P_k) converge vers l'isobarycentre g de P avec $g = \dfrac{z_1 + ... + z_n}{n}$.

Théorème (Déterminant circulant) 1 : Soient $a_0, ..., a_{n-1}$ des nombres complexes. On pose $\omega = e^{2i\pi/n}$. Alors

$$\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} \\ a_{n-1} & a_0 & a_1 & \cdots & a_{n-2} \\ a_{n-2} & a_{n-1} & a_0 & \cdots & a_{n-3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_0 \end{vmatrix} = \prod_{j=0}^{n-1} \sum_{k=0}^{n-1} a_k \omega^{jk}$$

Démonstration : On note C la matrice dont on veut calculer le déterminant et on définit la matrice J suivant :

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ 0 & & & & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

Ainsi $C = \sum_{k=0}^{n-1} a_k J^k$, et il suffit donc de diagonaliser J pour obtenir la diagonalisation de C. Pour déterminer les valeurs propres de J, on résoud donc le système $JX = \lambda X$ avec $X = {}^t(x_1, ..., x_n) \neq 0$:

$$\begin{cases} x_2 = \lambda x_1 \\ x_3 = \lambda x_2 \\ \vdots \, \vdots \\ x_1 = \lambda x_n \end{cases} \Rightarrow \forall i, x_i = \lambda^n x_i$$

Ainsi les racines de l'unité $\mathbb{U}_n = \{1, \omega, ..., \omega^{n-1}\}$ sont potentiellement valeurs propres de J et on vérifie que le vecteur $e_k = (1, \omega^k, ..., \omega^{(n-1)k})$ est effectivement un vecteur propre de J associé à la valeurs propres ω^k pour tout $k \in [\![0\,;n-1]\!]$. Ainsi J possède n valeurs propres distinctes et est donc diagonalisable. Il existe alors $P \in GL_n(\mathbb{C})$ tel que $J = PDP^{-1}$ où $D = diag(1, \omega, ..., \omega^{n-1})$. D'où

$$\begin{aligned}\det(C) &= \det\left(\sum_{k=0}^{n-1} a_k J^k\right) = \det\left(\sum_{k=0}^{n-1} a_k P D^k P^{-1}\right) \\ &= \det\left(\sum_{k=0}^{n-1} a_k D^k\right) = \prod_{j=0}^{n-1}\left(\sum_{k=0}^{n-1} a_k \omega^{jk}\right)\end{aligned}$$

> Le passage de la deuxième à la troisième égalité s'obtient en factorisant par P à gauche et P^{-1} à droite, de sorte à avoir un produit pour utiliser que le déterminant du produit est le produit des déterminants, et il nous reste bien la troisième égalité.

□

Résolution :

Démonstration : On représente P_k par le vecteur colonne $Z_k = {}^t(z_1^k, ..., z_n^k)$, et il s'agit alors de montrer que Z_k converge vers ${}^t(g, ..., g)$, où g est l'isobarycentre de P. En utilisant la notation matricielle, la relation de récurrence peut s'écrire sous la forme suivante :

$$Z_{k+1} = \begin{pmatrix} \frac{z_1^k + z_2^k}{2} \\ \vdots \\ \frac{z_n^k + z_1^k}{2} \end{pmatrix} = AZ_k \text{ avec } A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \cdots & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

On a donc $Z_k = A^k Z_0$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. Il suffit alors de montrer que $(A^k)_{k \geq 0}$ converge dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$(que l'on munit d'une norme quelconque car c'est espace vectoriel de dimension finie).
Pour cela, étudions les valeurs propres de A :

$$\chi_A(X) = \det(XI_n - A) = A = \begin{vmatrix} X - \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & X - \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & X - \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 0 & \cdots & 0 & X - \frac{1}{2} \end{vmatrix}$$

On reconnait un déterminant circulant avec $a_0 = X - \frac{1}{2}$, $a_1 = -\frac{1}{2}$ et $a_i = 0$ pour $i \geq 2$. En utilisant donc la formule du déterminant circulant, on obtient

$$\chi_A(X) = \prod_{j=0}^{n-1} \sum_{k=0}^{n-1} a_k \omega^{jk} = \prod_{j=0}^{n-1} \left(X - \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\omega^j\right) = \prod_{j=0}^{n-1} (X - \lambda_j)$$

Avec $\lambda_j = \frac{1+\omega^j}{2}$. Or comme $\lambda_i = \lambda_j \Leftrightarrow i = j$, on en déduit que A possède n valeurs propres distincts, et donc A est diagonalisable. Il existe $Q \in Gl_n(\mathbb{C})$ telle que $A = QDQ^{-1}$ avec $D = diag(\lambda_0, ..., \lambda_{n-1})$.
Or, pour $j \neq 0$,

$$|\lambda_j| = \left|\frac{1 + \omega^j}{2}\right| = \left|e^{ij\pi/n} \frac{e^{ij\pi/n} + e^{-ij\pi/n}}{2}\right| = \left|\cos\left(\frac{\pi j}{n}\right)\right| < 1$$

Ainsi $\lambda_j^k \underset{k \to +\infty}{\to} 0$ si $j > 0$, d'où A^k converge dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ vers $B = Qdiag(1, 0..., 0)Q^{-1}$ par continuité de $M \mapsto QMQ^{-1}$.
On pose donc $X = BZ_0$ de sorte que la suite (Z_k) avec $Z_k = A^k Z_0$ converge vers X. Par continuité de la multiplication matricielle à gauche et passage à la limite, on a nécessairement $X = AX$.

> En effet, on a alors $AZ_k = A^{k+1}Z_0$. Comme Z_k converge vers X et que A^{k+1} converge vers B, on a $AX = BZ_0 = X$.

Or, l'espace propre associé à 1 contient le vecteur propre ${}^t(1, ..., 1)$ et est de dimension 1, car A possède n valeurs propres distincts. Ainsi il existe $a \in \mathbb{C}$ tel que $X = (a, ..., a)$, c'est à dire que (P_k) converge vers le point d'affixe a. Il nous reste à montrer que $g = a$.
Pour cela, on remarque que si g est l'isobarycentre de P_0, il est aussi celui de P_k. En effet, en notant g_k l'isobarycentre de P_k, on obtient (avec les indices modulo n)

$$g_{k+1} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} z_i^{k+1} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \frac{z_i^k + z_{i+1}^k}{2} = \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n} \frac{2z_i^k}{2} = \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n} z_i^k = g_k$$

Or le vecteur $P_k = (z_1^k, ..., z_n^k)$ d'isobarycentre g_k converge vers $(a, ..., a)$. La fonction qui à n points du plan associe son isobarycentre est continue. Par continuité de l'isobarycentre, g_k converge vers l'isobarycentre de $(a, ..., a)$ qui est a. Comme $g_k = g$ pour tout $k \in \mathbb{N}$, alors on a finalement $g = a$ ce qui achève la démonstration. $\square$